Print ISSN:2717-0454
Online ISSN:2783-2856

Quarterly Journal of Innovation and Entrepreneurship
Http://journalie.ir

# Risk Parity Portfolio Optimization Based on CVaR

* Seyed Javad Pourhoseini ** Sayyed Mohammadreza Davoodi *** Mansour Momeni

* PhD student in industrial Management, financial Resources, Dehaghan Branch, Islamic Azad University, Dehaghan , Iran. sjpourhoseini@gmail.com

** Associate Professor, Department of Management, Dehaghan Branch, Islamic Azad University Dehaghan, Iran. smrdavoodi@ut.ac.ir

*** Professor, Department of Management, Tehran University, Tehran, Iran. mmomeni@ut.ac.ir

Received: 19.12.2023 Accepted: 16.03.2024

P.259-278

## Abstract

Risk parity is one of the stock portfolio selection models that has received much attention after the American financial crisis in 2008. The philosophy of this model is to allocate the risk of the portfolio to the same extent among its constituent assets. Conditional value at risk is one of the popular and common measures of risk measurement in finance, which measures the mathematical expectation of loss of a stock portfolio for values beyond a threshold value and at a known confidence level and time horizon. The aim of the current research is to design and optimize the performance of the risk parity stock portfolio model with the criterion of conditional risk value. There are different approaches in modeling optimal portfolio selection that use different criteria and methods to calculate and estimate returns and risks. Various criteria have been proposed to measure risk in finance, each of which has its own advantages and disadvantages. One of the criteria that has been introduced with the aim of reducing the disadvantages of the common and popular measure of value at risk is the conditional value at risk or expected drop, which is used as a measure of risk in the present study. Conditional value at risk measures the average loss of the portfolio for cases where the amount of loss exceeds value at risk.

**Keywords:** Conditional Value at Risk, Eulers's Theorem, Homogeneous Function, Risk Parity Portfolio.

Corresponding Author: Sayyed Mohammadreza Davoodi- Smrdavoodi@ut.ac.ir

## Introduction

In the current research, the optimal portfolio model of risk parity with the risk measurement criterion of conditional risk value is derived with the help of Euler's theorem for homogeneous functions and the duality theorem, in the form of a convex programming, and at the same time, an exemplary stock portfolio in the Tehran Stock Exchange. $X$ is subject to performance evaluation. If the random variable represents a cost or loss, the value at risk at the confidence level $\alpha$ denoted by $\mathrm{VaR}_{\alpha}(X)$, measures the maximum cost or loss due to the variable x at the confidence level α.

In this section, the steps of creating a sample portfolio of research based on the approach of risk equality based on the value exposed to conditional risk are explained and its performance is evaluated. The stock portfolio of the research consists of 8 indices or industries from the Tehran Stock Exchange between 2010 and the beginning of 2010. Using the index is the concept of forming a diverse portfolio of stocks in that industry. As an example, using the car index as an asset means that the subset of this index is purchased in a diverse manner (proportionate to their weight in the index). And thus, the sample portfolio of research is diverse. The time horizon of the stock portfolio is one week (it is closed for a period of one week) and 5 working days are considered each week.

## Methodology

The sample stock portfolio of the research consisting of 8 industries from the Tehran Stock Exchange in the period 2010 to the beginning of 2010 shows that the risk parity portfolio based on value exposed to conditional risk in the criteria of Sharpe ratio, Kalmar ratio and maximum capital loss has a better performance than the parity model. Normal risk (based on standard deviation) and equal weight model (equal weight).

To optimize the risk parity model based on conditional risk value (23), Payomo software package in Python programming language was used as a non-linear model. This software package includes facilities for linear and non-linear programming, whose non-linear programming engine uses the interior point approach for non-linear optimization. The result of optimization and calculation of the optimal weights of the stock portfolio for the first week of test data is presented according to 494 training data. The training data is used to optimize the stock portfolio and calculate the optimal weights, and each test data is a sample to specify the performance of the stock portfolio. The approach to calculate the weight of the stock portfolio will be rolling, and after calculating the first stock portfolio and calculating its return for the first week of test data, the first week of test data is also added to the sum of the training data until the optimal portfolio return for the second week of test data. be calculated To optimize the risk parity model based on conditional risk value as a non-linear model, Payomo software package in Python programming language was used. This software package includes facilities for linear and non-linear programming, whose non-linear programming engine uses the interior point approach for non-linear optimization.

## Findings

The process of calculating the optimal weights was done for all the test data and the returns of the stock portfolio were extracted for 100 test data. Basically, classification techniques are used to classify each data in a set of data and assign it to one of the predetermined sets of classes or groups. The classification process is based on a training set, the system learns to divide the data into the correct groups with the least error. The training set contains data whose category is known; Each pattern or category has a label and data with the same target label are placed in a group. The goal of this method is to learn a function that maps input patterns (feature vectors) to their corresponding labels. The classification process has two phases: training and testing. About 70% of the data in the dataset is selected as the training data and the remaining 30% of the data is selected for testing and validation. Obviously, the actual labels of the training patterns are already given. In the test phase, patterns whose labels are not known are given to the system and the designed system predicts their output or label with the help of the learned function. Choosing the right classification method leads to better results, according to the existing indicators, the better the indicators are, the better the performance of the investigated method.

## 5.Conclusion

In the current research, the model of choosing the portfolio of risk parity based on the value exposed to conditional risk was investigated. Conditional value at risk measures the average loss of the portfolio for cases where the amount of loss exceeds value at risk. The risk parity model in the selection of the stock portfolio allows the weight of the assets so that the risk share of the assets is equal to the total risk of the portfolio as much as possible. In this way, a kind of risk coverage is created for the portfolio against severe market drops. In the researches carried out on the issue of risk parity portfolio optimization, standard deviation has been used as a measure of risk, and the present study investigated the risk parity model with the criterion of value exposed to conditional risk. Due to the homogeneity of value exposed to conditional risk, Euler's theorem calculated the risk share of each asset. Finally, based on the Krosh-Kan-Tucker optimality conditions, you introduced the final model of risk equality based on value at conditional risk. The sample stock portfolio of the research was formed from 8 indices or industries from the Tehran Stock Exchange between 2010 and the beginning of 2010. Using the index means forming a diverse portfolio of stocks in that industry. As an example, using the car index as an asset means that the subset of this index is purchased in a diverse manner (proportionate to their weight in the index). The time horizon of the stock portfolio is one week (it is closed for a period of one week) and 5 working days were considered every week. The results of the model performance review in 100 test data show that the average weekly returns of the three stock portfolio selection approaches are almost the same, but the research model in the average criteria of negative returns, the largest weekly loss, cumulative return, standard deviation of return, value at risk, value at risk Conditional risk (0.95), Sharpe ratio, maximum capital loss and Kalmar ratio have a better performance than the two balanced and equal risk models based on standard deviation. Due to the importance of Sharpe and Kalmar ratio for risk-averse investors, it is recommended to use this model for them.

6.Refrences

Acerbi, C. (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. Journal of Banking & Finance, 26(7), 1505-1518.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. Mathematical finance, 9(3), 203-228.

Bai, X., Scheinberg, K., & Tutuncu, R. (2015). Least-squares approach to risk parity in portfolio selection. Quantitative finance, 16(3), 357-376.

Bucher, C., & Osterrieder, J. (2021). Risk Parity for Multi-Asset Futures Allocation – A Practical Analysis of the Equal Risk Contribution Portfolio (June 2, 2021). Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3858730.

Capiński, M., & Zastawniak, T. (2003). Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering, Springer.

Caporin, M., Lisi, F., & Janin, M. (2012). A survey on four families of perfomance measures. Working papers series, 12, 1-26.

Chaves, D. B., Hsu, J. C., LI, F., & Shakernia, O. (2011). Risk parity portfolio vs. other asset allocation heuristic portfolios. Journal of investing, 20, 108-118.

Choi, J., Kim, H., & Kim, S. (2021). Diversified Reward-Risk Parity in Portfolio Construction(September15,2021). Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3871944.

Costa, G., & Kwon, R. H. (2019). Risk parity portfolio optimization under a Markov regime-switching framework. Quantitative finance, 19(3), 453-471.

Costa, G., & Kwon, R. (2020). Data-Driven Distributionally Robust Risk Parity Portfolio Optimization. SSRN Electronic Journal. 10.2139/ssrn.3709680.

D. K. Bagal, A. Rath, A. Barua, and D. Patnaik, "Estimating the parameters of susceptible-infected-recovered model of COVID-19 cases in India during lockdown periods," Chaos Solitons Fractals,vol.140,p.110154,2020,doi:https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110154.

Davallou, M., Fadaei Molodi, H., & Safari Taherkhani, A. (2019). Stock allocation strategy with equal risk contribution. Financial Management Strategy Journal, 1-30.

DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? The review of financial studies, 22(5), 1915-1953.

Gambeta, V., & Kwon, R. (2020). Risk return trade-off in relaxed risk parity portfolio optimization. Journal of risk and financial management, 13(10), 1-28.

Kim, H., & Kim, S. (2021). Reduction of estimation error impact in the risk parity strategies. Quantitative Finance, 21(8), 1351-1364.

Lee, W. (2011). Risk-based asset allocation: a new answer to an old question? The journal of portfolio management, 37(4), 11-28.

Marat, M. (2020). A modified hierarchical risk parity framework for portfolio management. The journal of financial data science. DOI: https://doi.org/10.3905/jfds.2020.1.038

Mirmohammadi, E., Madanchi, M., Panahian, H., & Jabbary, H. (2021). Portfolio Selection using risk parity and factor analysis under markov regime-switching prope. Journal of Decisions& Operations Research, 7(1), 121-149.

Mirmohammadi, E., Madanchi, M., Panahian, H., & Jabbary, H. (2021). Stock Portfolio Optimization Using a Combined Approach of Relative Robust Risk Parity. Iranian Journal of Finance, 5(4), 87-106.

Nakagawa, K., Kawahara, T., & Ito, A. (2020) Asset Allocation Strategy with Non-Hierarchical Clustering Risk Parity Portfolio. Journal of Mathematical Finance, 10, 513-524.

Pflug, G. C. (2000). Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In Probabilistic constrained optimization (pp. 272-281). Springer, Boston, MA.

Rockafellar, R., & Uryasev, S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk. Journal of Risk, 2(3), 21-42.

Roncalli, T., & Weisang, G. (2016). Risk parity portfolios with risk factors. Quant. Finance. 16(3), 377–388.

Roncalli, T. (2013). Introduction to risk parity and budgeting. 1st edition, Chapman & Hall/CRC, USA

شاپای الکترونیکی: ۲۸۵۶-۲۷۸۳
شاپای چاپی:۰۴۵۴-۲۷۱۷
دو فصلنامه نوآوری و ارزش آفرینی
Http://journalie.ir

# طراحی و بهینه‌سازی سبد سهام برابری ریسک با معیار ارزش در معرض ریسک شرطی

*سیدجواد پورحسینی **سیدمحمدرضا داودی ***منصور مؤمنی
* دانشجوی دکترای مدیریت صنعتی گرایش مالی، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی ، دهاقان، ایران sjpourhoseini@gmail.com
** دانشیار گروه مدیریت، واحد دهاقان، دانشگاه آزاد اسلامی، دهاقان، ایران smrdavoodi@ut.ac.ir
*** استاد گروه مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران mmomeni@ut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۶
صص: ۲۷۸- ۲۵۹

**چکیده**

**هدف:** برابری ریسک، یکی از مدل‌های انتخاب سبد سهام می‌باشد که پس از بحران مالی آمریکا در سال ۲۰۰۸ مورد توجه بسیار قرار گرفته است. فلسفه این مدل، اختصاص تا حد یکسان ریسک سبد بین دارایی‌های تشکیل دهنده آن می‌باشد. ارزش در معرض ریسک شرطی یکی از معیارهای محبوب و متداول سنجش ریسک در مالی می‌باشد که امید ریاضی ضرر یک سبد سهام را برای مقادیر فراتر از یک مقدار آستانه و در یک سطح اطمینان و افق زمانی معلوم اندازه می‌گیرد. هدف پژوهش حاضر طراحی و بهینه سازی عملکرد مدل سبد سهام برابری ریسک با معیار ارزش در معرض ریسک شرطی می‌باشد.

روش: در پژوهش حاضر مدل سبد سهام بهینه برابری ریسک با معیار سنجش ریسک ارزش در معرض ریسک شرطی به کمک قضیه اویلر برای توابع همگن و قضیه دوگانی، به صورت یک برنامه ریزی محدب استخراج می گردد و در ضمن یک سبد سهام نمونه‌ای در بورس اوراق بهادار تهران مورد ارزیابی عملکرد قرار می‌گیرد.

یافته ها: سبد سهام نمونه‌ای پژوهش متشکل از ۸ صنعت از بورس اوراق بهادار تهران در بازه ۱۳۹۰ تا ابتدای ۱۴۰۰ نشان می‌دهد که سبد برابری ریسک بر مبنای ارزش در معرض ریسک شرطی در معیارهای نسبت شارپ، نسبت کالمار و بیشترین افت سرمایه دارای عملکرد بهتری نسبت به مدل برابری ریسک معمولی(بر پایه انحراف معیار) و مدل برابری وزن (هموزن) می‌باشد.

**نتیجه گیری:** با توجه به شاخص‌های عملکرد، به سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز پیشنهاد می‌شود تا از مدل انتخاب سبد سهام پژوهش استفاده کنند.

**واژه‌های کلیدی:** سبد سهام، ریسک شرطی، داده کاوی، شبکه عصبی.

**نوع مقاله:** **پژوهشی**

## ۱- مقدمه

مساله انتخاب بهینه سبد سهام، اوزان سبد یا سهم مشارکت هر دارایی از سرمایه اختصاص داده شده به سبد را بگونه‌ای محاسبه می‌کند که یک یا چند هدف مورد نظر سرمایه‌گذار بهینه یا برآورده گردد. بهینگی می تواند بر روی بیشینه سازی بازده مورد انتظار سبد، کمینه سازی ریسک یا ترکیبی از آنها (مساله چند هدفه) اختصاص یابد و محدودیت‌های برآورده شده می‌تواند شامل سقف بودجه، تعداد دارایی‌های مورد معامله، لحاظ هزینه‌های معاملاتی، محدودیت‌های مرتبط با افق زمانی و ... باشد. مدل مارکویتز[1] اولین بار به صورت علمی به مطالعه سبد سهام در چهارچوب میانگین-واریانس[2] پرداخت. رویکردهای مختلفی در مدل

1. Markowitz
2. Mean-variance

نویسندهٔ عهده‌دار مکاتبات: سیدمحمدرضا داوودی Smrdavoodi@ut.ac.ir

سازی انتخاب سبد بهینه وجود دارد که از معیارها و روش‌های مختلفی برای محاسبه و برآورد بازده و ریسک استفاده می کنند. معیارهای مختلفی برای سنجش ریسک در مالی مطرح گردیده که هر کدام دارای مزایا و معایب خاص خود می باشند. یکی از معیارهایی که با هدف کاستن از معایب معیار متداول و محبوب ارزش در معرض خطر معرفی گردیده است، ارزش در معرض ریسک شرطی یا ریزش مورد انتظار می‌باشد که در پژوهش حاضر بعنوان معیار سنجش ریسک مورد استفاده قرار می گیرد. ارزش در معرض ریسک شرطی، متوسط ضرر سبد را برای مواردی که میزان ضرر از ارزش در معرض ریسک بیشتر شود، اندازه می‌گیرد.

سبد سهام مارکویتز در جستجوی یک سبد سهام کارا یا کارآمد می‌باشد. در این رویکرد، سرمایه‌گذار دارای یک حداقل بازده مورد انتظار می‌باشد که سبد سهام باید آن را تأمین کند و سبد بهینه مارکویتز از بین تمام سبدهایی که این قابلیت را دارند، به دنبال سبدی با کمترین ریسک می‌باشد. بازده سبد سهام در مدل مارکویتز و بسیاری از مدل‌های دیگر، یک ترکیب خطی از بازده‌های دارایی‌های تشکیل دهنده آن می‌باشد. از این رو بازده سبد به شدت به تحقق بازده‌های مورد انتظار وابسته می‌باشد و انحراف از این تحقق می تواند سبد را با تغییرات شدید و غیر منتظره‌ای روبه‌رو کند. حال، وضعیت زمانی بدتر می‌شود که در فرآیند بهینه‌سازی و برای تحقق بازده مورد انتظار سبد، بخش عمده‌ای از وزن سبد بر روی یک یا چند دارایی محدود قرار گیرد. در این صورت انحراف دارایی‌های مورد نظر و ریزش شدید آن می تواند خسارت و ضرر فراوانی را متوجه سبد سهام گرداند. برای مقابله با چنین وضعیتی، نظریه‌هایی از سبد سهام رشد پیدا کرده اند که تخصیص وزن را تنها با در نظر گرفتن ریسک دارایی‌ها انجام می دهند و یکی از این رویکردها، سبد برابری ریسک[1] می‌باشد که همانطور که نام آن نشان می‌دهد به دنبال یکسان سازی سهم ریسک دارایی‌ها از ریسک کل سبد می‌باشد. پژوهش حاضر به دنبال توسعه یک مدل سبد سهام با رویکرد برابری ریسک و با در نظر گرفتن معیار سنجش ارزش در معرض ریسک شرطی[2] می‌باشد که تا کنون در ادبیات پژوهش بررسی نشده است. با استفاده از روش‌های داده کاوی مقدار میانگین خطای براورد شده[3] و شاخص‌های بهینه مدل محاسبه شده است و بهترین مدل با کمترین ریسک تخمین زده شده است.

## ۲- پیشینه پژوهش

هدف پژوهش حاضر طراحی و بررسی عملکرد مدل سبد سهام برابری ریسک بر مبنای ارزش در معرض ریسک شرطی می‌باشد. برای این منظور در این بخش نخست به معرفی ارزش در معرض ریسک شرطی پرداخته می‌شود و سپس سبد سهام برابری ریسک تشریح می گردد تا زمینه برای ارتباط بین آنها در قالب مدل پژوهش حاضر فراهم آید. ریسک به عنوان پتانسیل یک نتیجه نامطلوب (به عنوان مثال از دست دادن ارزش) ناشی از یک اقدام یا عدم اقدام تعریف می‌شود. در امور مالی، ریسک، عدم اطمینان پیرامون ارزش آتی یک دارایی یا سبد ابزارهای مالی تعریف می‌شود. اندازه گیری و کنترل ریسک برای بقا و حفظ یک سیستم مالی سالم و کارآمد ضروری است (مارات[4]،۲۰۲۰). سنجش ریسک یکی از چالش‌های مهم در مسئله انتخاب سبد سهام بهینه است. برای کمی‌سازی ریسک، سنجه‌های مختلفی در ادبیات مالی مورد استفاده قرار می‌گیرد که بعنوان نمونه، انحراف معیار بازده سبد سهام یکی از متداول ترین این معیارها است که هم انحرافات بالاتر از میانگین (انحراف مطلوب) و هم پایین‌تر از آن (انحراف نامطلوب) را در محاسبه ریسک مشارکت می‌دهد. معیارهای دیگری همچون نیم واریانس[5]، مجموع قدرمطلق انحرافات، ضریب بتا، ضریب تغییرات و .. نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند، لکن عملکرد مناسب این معیارها به نرمال بودن توزیع بازده وابسته است و بعلاوه چنین معیارهایی به صورت مستقیم با ضرر در ارتباط نیستند (برای سرمایه‌گذار اطلاعات شفافی در مورد میزان ضرر احتمالی فراهم نمی‌کنند).

1. Risk parity portfolio

2. CVaR : Conditional Value at Risk
3 .MSE
4. Marat
5 .Semi variance

ارزش در معرض ریسک[1](خطر) یکی از معیارهای سنجش ریسک نامطلوب است که به صورت مستقیم با مفهوم ضرر در ارتباط است و حداکثر ضرر یک سبد سهام را در یک سطح اطمینان مشخص برای یک دوره سرمایه‌گذاری معلوم اندازه می‌گیرد. بدین صورت این معیار نیاز به نرمال بودن توزیع بازده ندارد و برای هر توزیعی از بازده قابل محاسبه است (کپینسکی و زاستاویناک[2]،۲۰۰۳). ارزش در معرض ریسک با وجود کاربرد و گسترش فراوان، دارای کاستی‌هایی است. از جمله اینکه ارزش در معرض ریسک در بازارهای پر نوسان به صورت مناسبی عمل نمی‌کند و دیگر اینکه این معیار شرط زیرجمعی از شروط یک اندازه ریسک منسجم[3] را ندارد (کیم و کیم[4]،۲۰۲۱). آرتزنر و همکاران[5] (۱۹۹۹) اندازه ریسک منسجم را معرفی کردند که امروز بعنوان یکی از پایه‌های مالی نوین شناخته می‌شود. یک اندازه ریسک را منسجم گویند هرگاه دارای خاصیت‌های نرمالیتی، یکنوایی، زیر جمعی، همگونی مثبت و پایایی انتقال باشد. ارزش در معرض ریسک در شرط زیر جمعی که به مفهوم اثر بخشی تنوع است، صدق نمی‌کند. برای رفع این نقیصه ریزش مورد انتظار یا ارزش در معرض ریسک شرطی معرفی گردید. ریزش مورد انتظار، متوسط ضرر سبد را برای مواردی که میزان ضرر از ارزش در معرض ریسک بیشتر شود، اندازه می‌گیرد (بوچر و همکاران[6]،۲۰۲۱).

پس از معرفی ارزش در معرض ریسک شرطی، در ادامه به سبد برابری ریسک و اهمیت آن پرداخته می‌شود. در ساده‌ترین شکل، برابری ریسک به دنبال متعادل کردن سهم هر طبقه دارایی در ریسک کل سبد می‌باشد. یک سبد سنتی ۶۰ درصدی از اوراق قرضه و ۴۰ درصدی از سهام که پایه سبدهای بسیاری از سرمایه‌گذاران است، متنوع نیست. تقریباً ۹۰ درصد از ریسک در این سبد سنتی در سهام متمرکز است، به دلیل این واقعیت که سهام از نظر تاریخی سه برابر بی ثبات تر از اوراق بهادار با درآمد ثابت بوده است (چوی و همکاران[7]،۲۰۲۱). برابری ریسک به دنبال جلوگیری از این تمرکز ریسک از طریق ایجاد یک سبد متنوع و متوازن با ریسک است. برابری ریسک رویکردی است به منظور مدیریت پورتفوی سرمایه‌گذاری، که تمرکز این رویکرد به جای تخصیص سرمایه بر روی تخصیص ریسک می‌باشد. بر اساس این رویکرد زمانی که تخصیص دارایی‌ها در سطح ریسک برابری صورت گرفته باشد، انتظار می رود که سبد تدوینی نسبت شارپ بیشتری داشته و در مقابل افت بازار نسبت به پورتفوی با رویکرد سنتی مقاوم تر باشد (رونکالی و ویزانگ[8]،۲۰۱۶). بعنوان نمونه پژوهش دیمیگوئل و همکاران[9](۲۰۰۸) و همچنین چاوز و همکاران[10] (۲۰۱۲) نشان می‌دهد که برابری ریسک در معیار نسبت شارپ،اغلب دستاوردهای بهتری در مقایسه با استراتژی سبد بهینه میانگین-واریانس دارد. رویکرد تخصیص دارایی با سهم ریسک برابر برای اولین بار توسط ادوارد کاین[11] در سال ۲۰۰۵در مقاله‌ای در مورد مدیریت دارایی ارایه گردید. با گذشت زمان کمی، این استراتژی مورد توجه فعالان مدیریت دارایی قرار گرفت. بعضی از بخش‌های تئوری این رویکرد در سال‌های بین ۱۹۵۰ تا ۱۹۷۰ گسترش یافتند ولی اولین صندوق با رویکرد برابری ریسک که آل وِدِر[12] نامیده شد، در سال ۱۹۹۶ ایجاد شد. در سال‌های اخیر صندوق‌های سرمایه‌گذاری بسیاری به مشتریان خود، صندوق‌هایی با رویکرد ریسک برابری را توصیه می‌کنند. از آن زمان تاکنون شرکتهای سرمایه‌گذاری، مدیریت دارایی و صندوقهای زیادی مانند آکوئیلا کپیتال [13] ،شرکتهای نورث واتر[14]، ویلینگتون[15] و...این رویکرد را مورد استفاده قرار داده‌اند (میرمحمدی و همکاران،۱۴۰۰). براساس مقاله‌ای مربوط به سال ۲۰۱۰در وال استریت ژورنال، صندوقهای با

1. VaR: Value at Risk
2. Capinski and Zastawniak
3. Coherent risk measure
4. Kim and Kim
5. Artzner et al.
6. Bucher et al.
7. Choi et al.
8. Roncalli and Weisang
9. Demiguel et al.
10. Chaves et al
11. Qian
12. All Weather
13. Aquila Capital
14. North Water
15. Wellington

رویکرد ریسک متعادل در طول بحران مالی در سال ۲۰۰۸ شرایط به نسبت خوبی داشتند. به طور مثال طی همان زمان صندوق با رویکرد ریسک متعادل‌ای کیو آر تنها دچار ۱۸درصد کاهش شد که از نزول۲۲ درصدی صندوق شاخص متوازن ونگارد[1] بهتر بود. بر اساس گزارش سال ۲۰۱۳ وال استریت ژورنال، انواع صندوقهای با رویکرد ریسک متعادل که به وسیله صندوقهای پوشش ریسک، پیشنهاد می شدند، از زمان بحران مالی، به طور مستمر از افزایش محبوبیت و بازده مورد انتظار برخوردار بوده اند (میرمحمدی و همکاران،۲۰۲۱).

در ادامه به مرور پژوهشات صورت گرفته در حوزه برابری ریسک پرداخته می‌شود. میرمحمدی و همکاران (۱۴۰۰) مدل انتخاب سبد سهام ترکیبی برابری ریسک و تحلیل عاملی بر پایه تغییر رژیم مارکوف را معرفی کردند. تغییر رژیم مارکوف کمک می‌کند تا ماتریس کواریانس موجود در تابع هدف مدل برابری ریسک به کمک تحلیل عاملی وابسته به متغیر حالت برآورد شود. دستاوردهای پژوهش نشان می‌دهد که مدل ترکیبی پژوهش نسبت به مدل‌های متداول میانگین-واریانس و برابری وزن، نسبت شارپ بالاتری دارد و در افت‌های بازار نسبت به دو مدل مذکور مقاوم‌تر است و زیان کمتری تولید می‌کند. میرمحمدی و همکاران (۲۰۲۱) مدل انتخاب سبد سهام ترکیبی برابری ریسک-استوار نسبی را معرفی کردند که در استوار سازی سبد از رویکرد بدترین سناریوی نسبی بر روی پارامتر ماتریس کواریانس ظاهر شده در مدل برابری ریسک استفاده می‌کند. با توجه به داده‌های تاریخی چندین سناریو برای ماترس کواریانس در نظر گرفته می‌شود و مقدار تابع هدف مدل ترکیبی برای هر پورتفوی(نقطه شدنی)، بدترین نتیجه(بیشترین نوسان) در بین مجموعه سناریوها می‌باشد و در نهایت مدل، پورتفویی را انتخاب می‌کند که بدترین نتیجه ممکن برای آن دارای کمترین مقدار نوسان نسبی باشد. دوالو وهمکاران (۲۰۱۸) عملکرد سه استراتژی سبد سهام میانگین-واریانس، برابری وزن و برابری ریسک را به لحاظ ریسک، بازده و معیار شارپ با یکدیگر مقایسه کردند. نمونه مورد بررسی شامل داده‌های هفتگی ۲۵ شاخص اصلی بورس اوراق بهادار تهران از سال ۱۳۹۰ تا ابتدای سال ۱۴۰۰ می‌باشد. دستاوردهای این پژوهش نشان می‌دهد استراتژی تخصیص دارایی مبتنی بر برابری سهم ریسک در اغلب موارد عملکرد میانه و در پاره‌ای از مواقع هم بهترین عملکرد را در مقایسه با دو استراتژی دیگر داشته است و سرمایه‌گذاران و مدیران سبد سهام با بکارگیری آن از عملکرد قابل اتکاتری برخوردار خواهند بود.

چوی و همکاران[2] (۲۰۲۱) به طور تجربی استراتژی‌های برابری پاداش-ریسک را آزمایش کردند و عملکرد آن‌ها را با یک سبد ریسک هم وزن مقایسه کردند. این استراتژی‌ها مبتنی بر نسبت شارپ، نسبت کالمار و نسبت استار[3] می باشند. در این مدل‌ها سعی بر متناسب سازی سهم ریسک هر دارایی در سبد سهام بهینه متناسب با معیار عملکرد پاداش-ریسک می‌باشد که به منظور متناسب سازی از چندین رویکرد خطی و غیر خطی استفاده شده است. نتیجه پژوهش نشان می‌دهد که استراتژی‌های برابری پاداش-ریسک آزمایش شده، عملکرد مناسبی در معیار میانگین بازده نشان می‌دهد و همچنین با میانگین بازده حاصل از مدل برابری ریسک معمولی تفاوت اندکی دارد.

بوچر و همکاران[4] (۲۰۲۱) یک سبد سهام برابری ریسک را بر اساس یک پنجره متوالی ۳۰۰ روزه طراحی کردند که از اطلاعات ۲۱ قرارداد آتی استفاد می‌کند. این دارایی‌ها از چهار طبقه دارایی با دامنه داده از ژوئن ۲۰۰۵ تا مارس ۲۰۲۰ می‌باشد و تحلیل عملکرد و ریسک برای هر طبقه دارایی و سال انجام شده است. دستاوردهای پژوهش نشان می‌دهد که بسیاری از یافته‌های موجود در ادبیات پژوهش سبد برابری ریسک مانند تنوع قوی و نسبت شارپ بالاتر نسبت به مدل برابری وزن تایید می‌شود. همچنین دستاوردهای حاکی از عملکرد خوب مدل برابری ریسک در بحران مالی سال ۲۰۰۸ و تا حدودی بحران کووید۱۹ می‌باشد. کیم و کیم[5] (۲۰۲۱) استراتژی برابری ریسک را در صورت وجود خطاهای برآورد در نظر گرفتند و نشان

1. Vanguard

2. Choi et al.
3. STSR
4. Bucher et al.
5. Kim and Kim

دادند که سهم ریسک اجزای تشکیل دهنده این سبد می‌تواند به طور قابل‌توجهی نسبت به خطاهای تخمین حساس باشد، خصوصاً اگر از عوامل فاما و فرنچ[1] برای تشکیل سبد سهام استفاده شود، زیرا ویژگی آن‌ها در داشتن همبستگی‌های زوجی کم است. بر اساس این مشاهدات، یک الگوریتم جدید برای استراتژی برابری ریسک پیشنهاد می‌شود تا حساسیت سهم ریسک خارج از نمونه سبد سهام بهینه‌شده را از خطاهای برآورد، کاهش دهد. مطالعه تجربی نشان می‌دهد که سبد برابری ریسک ساخته‌شده از رقبای خود از نظر تعادل ریسک خارج از نمونه عملکرد بهتری دارد. کاستا و وون۲ (۲۰۲۰) یک فرمول استوار توزیعی از مسئله سنتی بهینه‌سازی سبد سهام برابری ریسک را پیشنهاد دادند که این امکان را می‌دهد تا تخمینی استوار از توزیع بازده دارایی‌ها، بدون نیاز به تحمیل ساختار خاصی بر داده‌ها، بدست آید. آزمایش‌های عددی نشان می‌دهد که یک سبد برابری ریسک با خاصیت استوار توزیعی می‌تواند نرخ بازده تعدیل‌شده ریسک بالاتری را در مقایسه با سبد معمول داشته باشد. ناکاگاوا و همکاران[3] (۲۰۲۰) در پژوهشی استراتژی برابری ریسک خوشه‌بندی غیر سلسله مراتبی را پیشنهاد دادند که سهم ریسک را از درون هر خوشه برابر می‌کند. با فرض اینکه دارایی‌هایی با حرکت مشابه دارای منابع ریسک مشترک هستند، رویکرد ارائه شده سبد سهامی ایجاد می‌کند که منابع ریسک را یکسان می‌کند. تحلیل تجربی با استفاده از داده‌های قیمت واقعی طبقات مختلف دارایی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی از استراتژی‌های برابری ریسک یا استراتژی‌های برابری ریسک خوشه‌بندی سلسله مراتبی بهتر عمل می‌کند. مارات[4] (۲۰۲۰) یک مدل سبد سهام سلسله مراتبی برابری ریسک را ارایه کرد که در آن از ماتریس کواریانس وزن دار شده نمایی استفاده می‌شود و برای تنوع بیشتر محدودیت‌هایی در مدل قرار داده شده است. نتیجه پژوهش به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو نشان می‌دهد که مدل برآورد شده تا پنجاه درصد ریسک سمت پایین را کاهش می‌دهد. گامبتا و وون[5] (۲۰۲۰) مدل انتخاب سبد سهام برابری ریسک آزاد را معرفی کردند. در این مدل سرمایه‌گذار می‌تواند یک سطح حداقلی مشخص از بازده را بعنوان یک قید به مسئله اضافه کند. در این حالت ممکن است ریسک از مقدار ریسک مدل برابری ریسک منحرف شود که در این صورت به کمک یک ساختار محاسباتی، همواره سعی می‌شود تا ریسک تا حد ممکن به ریسک سبد برابری ریسک نزدیک شود. نتیجه عملی پژوهش نیز نشان می‌دهد که سبد معرفی شده توانایی محافظه کاری سبد برابری ریسک را حفظ کرده است. کاستا و وون[6] (۲۰۱۹) برای مدل‌سازی بازده در برابری ریسک از مدل تغییر رژیم مارکوف استفاده کردند تا بتوانند تغییرات شدید در بازده ناشی از چرخه‌های اقتصادی را کنترل کنند. دستاوردهای حاصل از بهینه‌سازی سبد سهام نشان می‌دهد که عملکرد سبد سهام در داده‌های برون نمونه‌ای در معیار شارپ از مدل مارکویتز و مدل بدون مدل-سازی تغییر رژیم مارکوف بهتر است. رونکالی و ویزانگ[7] (۲۰۱۶) در پژوهشی ریسک یک سبد سهام را بر حسب عناصر تشکیل‌دهنده آن تجزیه کردند و مسئله انتخاب سبد سهام را به تنوع بخشی ریسک تجزیه بین عناصر سبد سهام بسط دادند. آن‌ها روش مورد استفاده را در چند مورد نمونه-ای شامل تخصیص دارایی به کمک مدل عاملی فاما و فرنچ، انتخاب دارایی در صندوق‌های پوشش ریسک و تخصیص دارایی استراتژیک بر پایه فاکتورهای اقتصادی به کار بردند. بای و همکاران[8] (۲۰۱۵) در بهینه‌سازی سبد سهام برابری ریسک از رویکرد بهینه‌سازی حداقل مربعات غیر محدب برای بهینه‌سازی سبد سهام حداقل واریانس بهره بردند که در آن جواب‌های حاصل شده برابر مجموعه تمام جواب‌های بهینه سبد سهام برابری ریسک می‌باشد. آن‌ها نشان دادند که جواب حاصل از الگوریتم تا حدود زیادی به جواب بهنیه نزدیک می‌باشد. چاوز و همکاران[9](۲۰۱۱) پژوهش خود را روی اوراق قرضه بلند مدت، اوراق با رتبه‌های مختلف

---

1. Fama and French
2. Costa and Kwon
3. Nakagawa
4. Marat
5. Gambeta and Kwon
6. Costa and kwon
7 Roncalli and Weisang
8. Bai et al.
9 Chaves et al.

سرمایه‌گذاری، بازارهای نوظهور سهام، کالاهای پایه و صندوق‌های زمین و ساختمان انجام دادند. آن‌ها دریافتند که استراتژی برابری ریسک در مقابل روش مینیمم واریانس نسبت شارپ بهتری دارد ولی در مقابل سبد سهام با وزن برابر و سبدهای بازنشستگی ۴۰/۶۰ اینگونه نیست. لی[۱] (۲۰۱۱) با پژوهش روی سهام اس‌اندپی۱۵۰۰ نشان داد که تخصیص مبتنی بر ریسک لزوماً جواب بهتری از نظر بازده به ریسک نسبت به سایر روشها ارائه نمی‌دهد. در پژوهش کاپورین و همکاران[۲] (۲۰۱۲) که بر روی ۳۰ سهم بزرگ از بازارهای آمریکا، اروپا و ژاپن انجام گرفت نشان داده شد که عملکرد مطلوب استراتژی سبد سهام با سهم برابری ریسک از منظر ریسک، بازدهی، نسبت شارپ، بیشترین افت سرمایه و تنوع‌پذیری منجر به استفاده بیشتر مدیران سرمایه‌گذاری از این روش شده است. میلارد و همکاران[۳] (۲۰۱۰) پژوهشی را بر روی شاخص‌های ۱۰ صنعت آمریکا از سال ۱۹۷۳ تا سال ۲۰۰۸ انجام دادند و بر این اساس آنها دریافتند در بازه مذکور عملکرد استراتژی سبد سهام با سهم ریسک برابر از منظر بازدهی، ریسک، نسبت شارپ، تنوع پذیری و بیشترین افت سرمایه بین دو روش دیگر قرار دارد. مرور پژوهشات صورت گرفته نشان می‌دهد که معیار سنجش ریسک مورد استفاده در مدل‌های برابری ریسک بررسی شده، انحراف معیار می‌باشد. همانطور که در ابتدای بخش بیان گردید، این معیار دارای کاستی‌هایی می‌باشد. ایده اصلی پژوهش حاضر جایگزینی ارزش در معرض ریسک شرطی به جای انحراف معیار در مدل برابری ریسک و توسعه مدل برابری ریسک بر مبنای ارزش در معرض ریسک شرطی می‌باشد. بر این اساس در بخش بعد جزئیات مدل برابری ریسک بر مبنای ارزش در معرض ریسک شرطی ارائه می‌شود.

## ۳- روش‌شناسی پژوهش

در صورتی که متغیر تصادفی $X$ نشان‌دهنده هزینه یا ضرر باشد، ارزش در معرض ریسک در سطح اطمینان $\alpha$ که با $\mathrm{VaR}_{\alpha}(X)$ نشان داده می‌شود، حداکثر هزینه یا ضرر ناشی از متغیر $X$ را در سطح اطمینان $\alpha$ اندازه می‌گیرد. بعنوان نمونه $VaR_{0.95}(X) = 10\$$ نشان می‌دهد که در ۹۵٪ مواقع حداکثر ضرر ناشی از متغیر تصادفی از ۱۰ دلار تجاوز نمی‌کند. به صورت دقیق، تعریف ارزش در معرض ریسک به صورت رابطه(۱) می‌باشد. (بگال، راس و همکاران)

$$VaR_{\alpha}(X) = min\{z|F_X(z) \geq \alpha\} 0 < \alpha < 1 \quad (۱)$$

که $F_X$ تابع توزیع تجمعی متغیر $X$ می‌باشد. () در حالت کلی، ارزش در معرض ریسک نسبت به ورودی خود یعنی $X$ ، ناپیوسته و غیرمحدب می‌باشد. یک سوال طبیعی این است که مقدار مورد انتظار ضرر در صورتی که از ارزش در معرض ریسک فراتر رود، چقدر است. ارزش در معرض ریسک شرطی برای پاسخ به این سوال تعریف گردیده است. ارزش در معرض ریسک شرطی برای متغیر تصادفی نشان دهنده هزینه یا ضرر $X$ در سطح اطمینان $\alpha$ به صورت رابطه(۲) تعریف می‌گردد. (بگال، راس و همکاران)

$$CVaR_{\alpha}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} zdF_X^{\alpha}(z)\, 0 < \alpha < 1 \quad (۲)$$

که

$$F_X^{\alpha}(z) = \begin{cases} 0 & z < VaR_{\alpha}(X) \\ \dfrac{F_X(z) - \alpha}{1 - \alpha} & z \geq VaR_{\alpha}(X) \end{cases} \quad (۳)$$

بر خلاف ارزش در معرض ریسک، ارزش در معرض ریسک شرطی نسبت به$X$ پیوسته و محدب می‌باشد (راکفلر و رایاسف[۴]،۲۰۰۰). ارزش در معرض ریسک بالا[۵] یا ریزش مورد انتظار[۶] به صورت متوسط مقادیر $X$ برای مقادیر اکیداً بزرگ‌تر از ارزش در معرض ریسک تعریف می‌شود. بعبارتی

$$CVaR^{+}(X) = E(X|X > VaR_{\alpha}(X)) \quad (۴)$$

1. Lee
2. Caporin et al
3. Maillard et al
4. Rockafellar and Uryasev
5. Upper CVaR
6. Expected shortfall

ارزش در معرض ریسک پایین[1] یا ارزش در معرض ریسک دمی[2] به صورت متوسط مقادیر $X$ برای مقادیر بزرگتر مساوی از ارزش در معرض ریسک تعریف می‌شود. بعبارتی

$$CVaR^{-}(X) = E(X|X \geq VaR_{\alpha}(X)) \tag{۵}$$

ارزش در معرض ریسک شرطی به صورت میانگین موزون ارزش در معرض ریسک بالا و پایین نیز مطابق رابطه (۶) قابل محاسبه می‌شود:

(۶)

$$CVaR(X) = \begin{cases} \lambda_{\alpha}(X)VaR_{\alpha}(X) + (1-\lambda_{\alpha}(X))CVaR^{+}( \\ VaR_{\alpha}(X) \end{cases}$$

که در آن

$$\lambda_{\alpha}(X) = \frac{F_X(VaR_{\alpha}(X)) - \alpha}{1-\alpha} \tag{۷}$$

همچنین آکربی[3](۲۰۰۲) تعریف معادل دیگری برای ارزش در معرض ریسک شرطی به صورت

$$CVaR(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} VaR_{\beta}(X)\, d\beta \tag{۸}$$

ارائه کرد. پی فلاگ[4](۲۰۰۰) نیز تعریف معادلی برای ارزش در معرض ریسک به صورت جواب یک مدل کمینه سازی (۹) ارائه کرد.

$$\mathrm{CVar}_{\alpha}(X) = \min_{\eta}\{\eta + \frac{1}{1-\alpha}E(|X-\eta|_{+})\} \tag{۹}$$

که $|x|_{+} = max\{x,0\}$. بر اساس رابطه (۹)، در صورتی که $X$ یک متغیر تصادفی گسسته باشد که مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ را با احتمالات $p_1, p_2, \dots, p_n$اخذ کند، در این صورت ارزش در معرض ریسک شرطی در سطح خطای $\alpha$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\min_{\eta} \eta + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{j\in 1}^{n} p_j w_j \tag{۱۰}$$

$$s.t.$$

$$w_j \geq x_j - \eta j = 1,2,\dots,n$$

$$w \in R_{+}^{n}, \eta \in R$$

در ادامه به بررسی مدل سبد سهام با تابع هدف ارزش در معرض ریسک شرطی (بعنوان سنجه اندازه‌گیری ریسک) پرداخته می‌شود. فرض کنیم که سبد سهام از $n$ دارایی تشکیل شده است و$(R_1, R_2, \dots, R_n)$ بردار تصادفی نشان دهنده بازده توام دارایی‌ها می‌باشد که هر کدام از بازده‌ها از توزیع گسسته متناهی پیروی می‌کند. بردار وزن سبد با $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نشان داده می‌شود که

$$\forall i: x_i \geq 0, \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \tag{۱۱}$$

$$X = -\sum_{k=1}^{n} R_k x_k$$

بر این اساس متغیر تصادفی نشان دهنده ضرر سبد سهام می‌باشد. بدین صورت مقادیر منفی $X$ متناظر با سود و مقادیر مثبت متناظر با ضرر می‌باشد. فرض کنیم بردار $R$ ، $T$مقدار $r_t = (r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt}), 1 \leq t \leq T$ را متناظر با احتمالات $p_1, p_2, \dots, p_T$ اخذ کند(بعنوان نمونه $t = 1,2,\dots,T$ می تواند تعداد بازده‌های تاریخی باشد). بنابراین تابع ضرر سبد سهام مقادیر $\{-\sum_{k=1}^{n} r_{kt}x_k\}_{t=1}^{T}$ را به ترتیب با احتمال $\{p_t\}_{t=1}^{T}$ اخذ می‌کند. بنابراین با توجه به رابطه(۱۰)، سبد بهینه ارزش در معرض ریسک شرطی گسسته به صورت

$$\min \quad \eta + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{t=1}^{T} p_t w_t \tag{۱۲}$$

$$s.t:$$

$$w_t \geq (\sum_{k=1}^{n} -r_{kt}x_k) - \eta t = 1,2,\dots,T$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

$$w \in R_{+}^{T}, \eta \in R, x \in R_{+}^{n}$$

تعریف می‌شود. در ادامه مدل پژوهش یعنی صورت سبد برابری ریسک بر پایه ارزش در معرض ریسک شرطی مورد بررسی قرار می گیرد، اما قبل از آن، مدل برابری ریسک

1. Lower CVaR
2. Tail VaR
3. Acerbi
4. Pflug

معمولی مرور می گردد. در مدل برابری ریسک، قضیه اویلر[1] برای توابع همگن نقش اساسی دارد زیرا سهم ریسک هر دارایی از ریسک کل سبد سهام را مشخص می‌کند. تابع $f: R^n \to R$ را همگن از مرتبه اول نامند هر گاه

(۱۳)

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n) \lambda \neq 0$$

قضیه اویلر بیان می‌کند که برای تابع همگن $f$T رابطه (۱۳) برقرار می‌باشد.

(۱۴)

$$f(x = (x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} + \dots . + x_n \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}$$

در صورتی که تابع $f$نشان دهنده ریسک سبد سهام باشد، آنگاه رابطه(۱۴) را می توان به این صورت تأویل کرد که $x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ سهم ریسک دارایی $i$ام از ریسک کل سبد سهام می‌باشد. فرض کنیم n دارایی با بردار وزن$x$ تشکیل یک سبد سهام بدهد. آنگاه انحراف معیار بازده سبد سهام بعنوان سنجه‌ای برای اندازه‌گیری ریسک برابر $\sigma_p = \sqrt{x^t \Sigma x}$ می‌باشد که $\Sigma$ ماتریس کواریانس دارایی‌ها می‌باشد. در صورتی که $\sigma_i 1 \leq i \leq n$ سهم ریسک هر دارایی از ریسک سبد سهام باشد ($\sigma_i$در اینجا نشان دهنده انحراف

(۱۵)

$$\sigma_p = \sqrt{x^t \Sigma x} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i.$$

معیار نیست) آنگاه می‌توان نوشت:

که مطابق رابطه اویلر، سهم ریسک دارای i ام برابر $\sigma_i = x_i \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^t \Sigma x}}$می‌باشد. مدل برابری ریسک به دنبال یکسان‌سازی سهم ریسک دارایی‌های از ریسک کل سبد می‌باشد و برای این منظور به بهینه‌سازی مدل رابطه (۱۶) اقدام می‌کند. در مدل (۱۶) با توجه به مثبت بودن عواملی که در تابع هدف وجود دارد برای کمینه شدن باید تمامی عوامل تا حد ممکن به هم نزدیک شوند و این یعنی تمامی سهم ریسک‌ها باید تا حد ممکن نزدیک بهم شود.

(۱۶)

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i (\Sigma x)_i - (x_j \Sigma x)_j)^2$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
$$x \geq 0$$

صورت معادل مسئله برابری ریسک به صورت رابطه (۱۷) می‌باشد:

(۱۷)

$$\min \quad \psi^t \Sigma \psi$$
$$\sum Ln(\psi_i) \geq C, \psi \geq 0,$$

که در آن $C$ یک مقدار مثبت دلخواه می‌باشد و با نرمال‌-سازی مقادیر$\psi_i$ به صورت $x_i^* = \psi_i / \sum_{i=1}^{n} \psi_i$ اوزان بهینه سبد سهام برابری ریسک مشخص می‌شود (رونکالی[2]، ۲۰۱۳).

حال به مدل پژوهش برمی گردیم. ارزش در معرض ریسک شرطی همگن از مرتبه اول می‌باشد و بنابراین قضیه اویلر برای آن صادق خواهد بود.. ادعا می‌شود که سبد بهینه برابری ریسک با تابع ارزش در معرض ریسک شرطی معادل حل بهینه مساله کمینه سازی (۱۸) می‌باشد.

$$\min \quad CVaR_\alpha(x = (x_1, \dots, x_n)) \qquad (۱۸)$$
$$\sum_{k=1}^{n} ln(x_k) \geq c$$
$$x \in R_{++}^n$$

که در آن $c \in R$ ثابت دلخواهی می‌باشد. برای این منظـور نخست تابع لاگرانژین

$$L(x, \lambda) = CVaR_\alpha(x) + \lambda(c - \sum ln(x_k)) \qquad (۱۹)$$

1. Euler

2. Roncalli

Quarterly Journal Innovation and Entrepreneurship V.12 No.24. Fall & Winter 2024

تشکیل می گردد و با توجه به شرایط کروش کان تاکر[48] (KTT) داریم:

(۲۰)

$$\frac{\partial L}{\partial x_k^*} = \frac{\partial CVaR_\alpha(x^*)}{\partial x_k^*} - \frac{\lambda}{x_k^*} = 0k = 1,2,\dots,n$$

که به مفهوم

(۲۱)

$$x_k^* \frac{\partial CVaR_\alpha(x^*)}{\partial x_k^*} = \lambda$$

می‌باشد که نشان می‌دهد که سهم ریسک دارایی‌ها از ریسک کل برابر می‌باشد. برای یافتن بردار بهینه $\bar{x}^*$ نرمال(برداری که جمع دارایه‌های آن برابر یک باشد)، تعریف می کنیم:

(۲۲)

$$\bar{x}^* = \frac{x^*}{\sum_{i=1}^{n} x_i^*}$$

در این صورت $\bar{x}^*$ جواب بهینه متناظر با مقدار $\bar{c} = c - n\, ln(\sum_{i=1}^{n} x_i^*)$ می‌باشد. با ترکیب مدل‌های(۱۲) و (۱۸)، صورت سبد برابری ریسک ارزش در معرض ریسک شرطی به صورت مدل(۲۳) می‌باشد.

(۲۳)

$$min \quad \eta + \frac{1}{1-\alpha}\sum_{t=1}^{T} p_t w_t$$

$$st:$$

$$w_t \geq \sum_{k=1}^{n} -r_{kt}x_k - \eta\ t = 1,2,\dots,T$$

$$\sum_{k=1}^{n} ln(\,x_k) \geq c$$

$$w_t \in R_+ t = 1,2,\dots,T$$

$$\eta \in R, x_k > 0k = 1,2,\dots,n$$

جواب بهینه نهایی حاصل از نرمال سازی جواب بهینه (۲۳) می باشد. مدل برابری ریسک بر مبنای ارزش در معرض ریسک شرطی، مدل(۲۳) می‌باشد که یک مساله برنامه ریزی محدب می باشد و در بخش بعد مورد پیاده سازی عملی و بررسی عملکرد قرار می گیرد.

## ۴- یافته‌های پژوهش

در این بخش مراحل تشکیل سبد نمونه ای پژوهش بر اساس رویکرد برابری ریسک بر مبنای ارزش در معرض ریسک شرطی تبیین و عملکرد آن ارزیابی می گردد. سبد سهام پژوهش از ۸ شاخص یا صنعت از بورس اوراق بهادار تهران در بازه ۱۳۹۰ تا ابتدای ۱۴۰۰ تشکیل شده است. استفاده از شاخص به مفهوم تشکیل یک سبد سهام متنوع از سهام موجود در آن صنعت می‌باشد. بعنوان نمونه استفاده از شاخص خودرو بعنوان یک دارایی به این معنی می‌باشد که زیر مجموعه این شاخص به صورت متنوع (متناسب با وزن آنها در شاخص) خریداری شود. و بدین ترتیب سبد نمونه ای پژوهش، متنوع می باشد. افق زمانی سبد سهام یک هفته‌ای می‌باشد(برای دوره یک هفته بسته می‌شود) و هر هفته ۵ روز کاری در نظر گرفته شده است. آمار توصیفی مربوط به ۵۹۴ بازده هفتگی دارایی‌ها در جدول (۱) ارایه شده است.

**جدول۱. آمار توصیفی بازده هفتگی دارایی‌های سبد**

| DEA | میانگین | میانه | بیشینه | کمینه | انحراف معیار | شاخص‌های نرمالیتی: چولگی | آماره Z | کشیدگی | آماره Z | نتیجه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱-بانک | 0.007 | 0.001 | 0.150 | -0.150 | 0.039 | -0.598 | -0.953 | -0.311 | -0.499 | نرمال |
| ۲-کانی فلزی | 0.009 | 0.000 | 0.150 | -0.136 | 0.047 | -0.134 | -0.213 | -0.600 | -0.962 | نرمال |
| ۳-سیمان | 0.009 | 0.000 | 0.150 | -0.136 | 0.047 | -0.136 | -0.217 | -0.915 | -1.468 | نرمال |
| ۴-دارو | 0.010 | 0.002 | 0.150 | -0.134 | 0.036 | -0.014 | -0.023 | -0.844 | -1.355 | نرمال |
| ۵-فرآورده نفتی | 0.010 | 0.002 | 0.150 | -0.150 | 0.054 | -0.476 | -0.757 | -0.647 | -1.038 | نرمال |
| ۶-ماشین آلات | 0.009 | 0.003 | 0.150 | -0.150 | 0.038 | -0.074 | -0.118 | -0.486 | -0.779 | نرمال |
| ۷-قند | 0.011 | 0.003 | 0.150 | -0.112 | 0.049 | -0.128 | -0.204 | -0.812 | -1.303 | نرمال |
| ۸-خودرو | 0.008 | 0.001 | 0.150 | -0.150 | 0.055 | -0.028 | -0.045 | -0.525 | -0.843 | نرمال |

در جدول آمار توصیفی، ستون میانگین نشان دهنده متوسط بازده هفتگی کسب شده در شاخص مورد نظر می‌باشد. ستون‌های بیشینه و کمینه هم نشان می‌دهد دوره پژوهش شاهد هفته‌هایی بوده است که شاخص‌های مورد نظر دچار رشد یا نزول‌های شدید بوده است. در جدول آمار توصیفی انحراف معیار استاندارد، پراکندگی داده‌ها را حول میانگین نشان می‌دهد. قبل از آزمون فرضیات تحقیق برای انتخاب نوع آماره به منظور آزمون فرضیات، لازم است فرض نرمال بودن داده‌ها با استفاده از شاخص‌های چولگی و کشیدگی مورد بررسی قرار گیرد. با توجه به جدول ۱، به دلیل اینکه قدرمطلق آماره z کمتر از ۱/۹۶ است در نتیجه ادعای نرمال بودن توزیع متغیرها پذیرفته می‌شود.

هشت شاخص معرفی شده در جدول(۱) جهت تشکیل سبد سهام برابری ریسک بر پایه ارزش در معرض ریسک شرطی مورد استفاده قرار گرفتند. ۵۹۴ بازده هفتگی استخراج شده به دو گروه آموزشی و تست تقسیم گردید که به ترتیب شامل ۴۹۴ و ۱۰۰ داده می‌باشند. از داده‌های آموزشی به منظور بهینه‌سازی سبد سهام و محاسبه اوزان بهینه استفاده می‌شود و هر داده تست، به منزله یک نمونه برای مشخص سازی عملکرد سبد سهام می‌باشد. رویکرد محاسبه وزن سبد سهام به صورت غلطان خواهد بود و پس از محاسبه اولین سبد سهام و محاسبه بازده آن برای اولین هفته از داده‌های تست، اولین هفته از داده‌های تست نیز به جمع داده‌های آموزشی اضافه می‌شود تا بازده سبد بهینه برای دومین هفته از داده‌های تست محاسبه گردد. برای بهینه‌سازی مدل برابری ریسک بر مبنای ارزش در معرض ریسک شرطی (۲۳)، بعنوان یک مدل غیر خطی از بسته نرم افزاری پایومو[1] در زبان برنامه نویسی پایتون[2] استفاده گردید. این بسته نرم افزاری شامل امکاناتی برای برنامه ریزی‌های خطی و غیر خطی می‌باشد که موتور برنامه ریزی غیر خطی آن از رویکرد نقطه درونی برای بهینه سازی غیر خطی استفاده می‌کند. نتیجه بهینه‌سازی و محاسبه اوزان بهینه سبد سهام برای اولین هفته از داده‌های تست با توجه به ۴۹۴ داده اموزشی در جدول(۲) ارائه شده است.

**جدول۲. اوزان بهینه سبد سهام برای هفته اول از داده‌های تست**

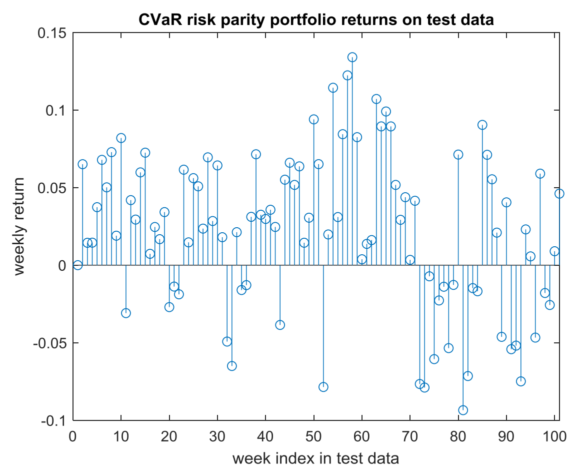
| دارایی / وزن بهینه | وزن غیر نرمال | وزن نرمال شده |
|---|---|---|
| بانک | 1.388907 | 0.143415 |
| کانی فلزی | 0.907954 | 0.093753 |
| سیمان | 0.907954 | 0.093753 |
| دارو | 2.372046 | 0.244932 |
| فرآورده نفتی | 0.942805 | 0.097352 |
| ماشین آلات | 1.154477 | 0.119209 |
| قند | 1.306619 | 0.134919 |
| خودرو | 0.703743 | 0.072667 |

فرآیند محاسبه اوزان بهینه برای تمام داده‌های تست صورت گرفت و بازده‌های سبد سهام برای ۱۰۰ داده تست مطابق نمودار(۱) استخراج گردید. اصولاً از تکنیک‌های طبقه‌بندی برای طبقه‌بندی هر داده در مجموعه‌ای از داده‌ها و اختصاص به یکی از مجموعه‌های از پیش تعیین شده کلاس‌ها یا گروه‌ها استفاده می‌شود. فرایند طبقه‌بندی به این صورت است که براساس یک مجموعه آموزشی سیستم یاد می‌گیرد داده ها را به گروه‌های درست با کمترین خطا تقسیم بندی کند. مجموعه‌ی آموزش حاوی داده‌هایی است که دسته‌ی آن‌ها مشخص است؛ هر الگو یا دسته یک برچسب[3] دارد و داده‌هایی با برچسب هدف یکسان در یک گروه قرار می‌گیرند. هدف این روش، یادگیری تابعی است که الگوهای (بردارهای ویژگی) ورودی را به برچسب‌های متناظرشان نگاشت می‌کند. فرایند طبقه‌بندی دارای دو فاز آموزش و آزمون است. حدود ۷۰٪ از داده‌های موجود در دیتاست را به عنوان داده‌ی آموزش انتخاب کرده و ۳۰٪ داده‌های باقی مانده برای آزمون و اعتبارسنجی انتخاب می‌شوند. بدیهی است که برچسب‌های واقعی الگوهای آموزشی از قبل داده شده اند. در فاز تست الگوهایی که برچسب آنها مشخص نیست به سیستم داده می‌شوند و سیستم طراحی شده به

1. Pyomo
2. Python
3. Label

کمک تابع یادگرفته شده‌ی خود خروجی یا برچسب آنها را پیش‌بینی می‌کند. انتخاب روش طبقه‌بندی مناسب نتایج بهتری را در پی دارد، متناسب با شاخص‌های موجود، هر چقدر شاخص‌ها در وضعیت بهتری باشند، نشان می‌دهد روش مورد بررسی عملکرد بهتری داشته است.

برای بررسی عملکرد سبد بهینه برابری ریسک بر مبنای ارزش در معرض ریسک شرطی از دو سبد برابری ریسک معمولی (بر پایه انحراف معیار) و سبد برابری وزن یا هم وزن استفاده گردید. سبد برابری ریسک معمولی از بهینه‌سازی مدل(۱۷) محاسبه گردید و سبد هم وزن نیز برای دارایی‌های وزن یکسان ۰٫۱۲۵ را در نظر می گیرد. اوزان بهینه سبدهای مذکور مطابق جدول(۳) می‌باشد.




**نمودار۱. بازده سبدسهام برابری ریسک برمبنای ارزش درمعرض ریسک شرطی درداده‌های تست**

**جدول۳. اوزان بهینه سبدهای برابری ریسک و هم وزن**

| سبد سهام / دارایی | سبد برابری ریسک | سبد هم وزن |
|---|---|---|
| بانک | 0.138848 | 0.125 |
| کانی فلزی | 0.125567 | 0.125 |
| سیمان | 0.125567 | 0.125 |
| دارو | 0.073683 | 0.125 |
| فرآورده نفتی | 0.114952 | 0.125 |
| ماشین آلات | 0.116844 | 0.125 |
| قند | 0.107412 | 0.125 |
| خودرو | 0.197128 | 0.125 |

**جدول ۴. نتایج حاصل از شبیه سازی با روش شبکه عصبی پرسپترون چندلایه**

| شاخص | مقدار |
|---|---|
| Time taken to build model | 0.42 seconds |
| Time taken to test model on test split | 0 seconds |
| $R^2$ | 0.416 |
| MSE | 0.8646 |
| RMSE | 1.0292 |
| RAE | 89.6873 % |
| RASE | 94.8159 % |

نتایج این روش بر اساس تابع فعال سازی از نوع سیگموید[۱] بوده است، تعداد نورون های لایه پنهان[۲] ۲ بوده است، الگوریتم یادگیری هم بازگشت به عقب[۳] با روش گرادیان نزولی بوده است. نرخ یادگیری[۴] برابر ۰/۳ بوده است. دسته ورودی اطلاعات ۱۰۰ تا ۱۰۰ تا بوده است و مقدار دیتا آموزش ۷۰٪ داده ها بوده است. نتایج نشان داده است مدت زمان ساخت مدل ۰/۴۲ ثانیه بوده است، مقدار ضریب توان پیش‌بینی ($R^2$) این روش ۴۱/۶ درصد بوده است. مقدار MSE این روش برابر ۸۶/۴٪ بوده است. سایر شاخص های مدل را می‌توان در جدول ۴ مشاهده نمود.

در ادامه عملکرد سبد سهام پژوهش در داده‌های تست در شاخص‌های مختلف محاسبه و با عملکرد سبدهای برابری ریسک معمولی و برابری وزن مقایسه گردید. نخست به اختصار به معرفی سه شاخص نسبت شارپ[۵]، بیشترین افت سرمایه(MDD)[۶] و نسبت کالمار[۷] پرداخته می‌شود. نسبت شارپ یکی از شناخته شده‌ترین نسبت‌های ریسک به پاداش در مالی است که به طور گسترده‌ای استفاده می‌شود. نسبت شارپ به عنوان نسبت بازده مورد انتظار به انحراف استاندارد یک متغیر تصادفی نشان دهنده بازده تعریف می‌شود:

(۲۴)

$$SR = \frac{E(r - r_f)}{\sigma(r - r_f)}$$

1. Sigmoid
2 .Hidden Node
3 .backpropagation
4 .Learning Rate
5 .Sharpe ratio
6 .Maximum drawdown
7 .Kalmar

که در آن $E$مقدار انتظار، $\sigma$ انحراف استاندارد و $r_f$ نرخ بدون ریسک است. از دیدگاه سرمایه‌گذاران ریسک گریز، دارایی‌هایی با نسبت‌های شارپ بالاتر در ساخت سبد سهام ارجحیت بیشتری دارند. حداکثر افت یا کاهش سرمایه بدترین ضرر متوالی در یک دوره زمانی مشخص است. حداکثر افت سبد سهام توسط رابطه (۲۵) اندازه‌گیری می‌شود.

(۲۵)

$$MDD = -\min_{\tau \in (0,T)} \left( \min_{t \in (0,\tau)} r(t,\ \tau) \right)$$

که در آن r(t, t') بازده در بازه زمانی بین t و t' است و بدترین عملکرد تحقق یافته از زمان آغاز به کار سبد در طول یک افق سرمایه‌گذاری معین است. بنابراین دارایی‌هایی با کمترین میزان حداکثر افت بیشتر مورد علاقه سرمایه‌گذاران هستند. نسبت کالمار نسبت بازده تجمعی تحقق یافته به حداکثر کاهش سرمایه مطابق رابطه(۲۶) می باشد.

(۲۶)

$$Calmar = \frac{R}{MDD}$$

سرمایه‌گذاران دارایی‌هایی با نسبت‌های کالمار بالاتر را به دارایی‌هایی با نسبت‌های کالمار پایین تر ترجیح می دهند.مقایسه عملکرد سبد پژوهش با مدل‌های برابری وزن و برابری ریسک معمولی در داده‌های تست در جدول(۵) ارائه شده است.

**جدول۵. مقایسه عملکرد مدل پژوهش با مدل‌های برابری ریسک و هموزن**

| سبد سهام / معیار عملکرد | مدل پژوهش | برابری ریسک | برابری وزن |
|---|---|---|---|
| میانگین بازده هفتگی | 0.022401 | 0.022179 | 0.02215 |
| متوسط بازده‌های منفی | -0.03111 | -0.0396 | -0.04206 |
| بیشترین ضرر هفتگی | -0.07147 | -0.09105 | -0.10262 |
| انحراف معیار بازده | 0.040083 | 0.049006 | 0.050478 |
| ارزش در معرض ریسک(۰,۹۵) | 0.067001 | 0.070261 | 0.07384 |
| ارزش در معرض ریسک شرطی(۰,۹۵) | 0.068047 | 0.078553 | 0.082375 |
| نسبت شارپ | 0.558865 | 0.452573 | 0.438801 |
| حداکثر افت سرمایه | 0.335979 | 0.384855 | 0.399249 |
| نسبت کالمار | 21.72422 | 18.32796 | 17.73531 |

دستاوردهای حاصل شده در جدول(۵) حاکی از عملکرد بهتر مدل پژوهش نسبت به دو مدل برابری ریسک معمولی و مدل هموزن می باشد. هر چند در متوسط بازده و بازده تجمعی، تفاوت چندانی بین سه مدل دیده نمی شود، اما در ملاک‌های سنجش ریسک، عملکرد بهتری از مدل برابری ریسک مبتنی بر ارزش در معرض ریسک شرطی دیده می شود. با توجه به معیارهای متوسط بازده‌های منفی و بیشترین ضرر هفتگی مشاهده می شود که مدل پژوهش در مقابل ریزش‌های بازار مقاومت تر از دو مدل دیگر می باشد. همچنین مدل برابری ریسک معمولی نیز مقاوم تر از مدل هموزن می باشد. معیارهای عملکرد نسبت شارپ و نسبت کالمار نیز حاکی از بازده تعدیل شده مناسب استراتژی پژوهش نسبت به دو مدل دیگر می‌باشد و لذا سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز با این استراتژی می‌توانند ریسک به اندازه‌تری داشته باشند. کوچکتر بودن ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی مدل پژوهش در داده‌های تست نیز حاکی از مقاوت بیشتر سبد در برابر افت‌های بازار و در مجموع تحمل ریسک نامطلوب کمتر می‌باشد.

## ۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در پژوهش حاضر مدل انتخاب سبد سهام برابری ریسک بر مبنای ارزش در معرض ریسک شرطی مورد بررسی قرار گرفت. ارزش در معرض ریسک شرطی، متوسط ضرر سبد را برای مواردی که میزان ضرر از ارزش در معرض ریسک بیشتر شود، اندازه می‌گیرد. مدل برابری ریسک در انتخاب سبد سهام، وزن دارایی‌ها را چنان اختیار می‌کند که سهم ریسک دارایی‌ها از ریسک کل سبد تا حد ممکن برابر شود. بدین صورت نوعی پوشش ریسک برای سبد در مقابل افت‌های شدید بازار ایجاد می‌شود. در پژوهشات صورت گرفته در موضوع بهینه سازی سبد برابری ریسک از انحراف معیار بعنوان سنجه ریسک استفاده گردیده است و پژوهش حاضر مدل برابری ریسک را با معیار ارزش در معرض ریسک شرطی مورد بررسی قرار داد. با توجه به همگن بودن ارزش در معرض ریسک شرطی، قضیه اویلر سهم ریسک هر دارایی را مورد محاسبه قرار داد. در نهایت بر اساس شرایط بهینگی کروش-کان-تاکر، مدل نهایی برابری ریسک بر مبنای ارزش

در معرض ریسک شرطی را مطابق رابطه (۲۳) معرفی گردانید. مدل نهایی یک مدل غیر خطی می‌باشد که برای بهینه‌سازی آن از بسته نرم افزاری پایومو در زبان برنامه نویسی پایتون استفاده گردید. سبد سهام نمونه‌ای پژوهش از ۸ شاخص یا صنعت از بورس اوراق بهادار تهران در بازه ۱۳۹۰ تا ابتدای ۱۴۰۰ تشکیل گردید. استفاده از شاخص به مفهوم تشکیل یک سبد سهام متنوع، از سهام موجود در آن صنعت می‌باشد. بعنوان نمونه استفاده از شاخص خودرو بعنوان یک دارایی به این معنی می‌باشد که زیر مجموعه این شاخص به صورت متنوع (متناسب با وزن آنها در شاخص) خریداری شود. افق زمانی سبد سهام یک هفته‌ای می‌باشد (برای دوره یک هفته بسته می‌شود) و هر هفته ۵ روز کاری در نظر گرفته شد. دستاوردهای بررسی عملکرد مدل در ۱۰۰ داده تست نشان می‌دهد که میانگین بازده هفتگی سه رویکرد انتخاب سبد سهام تقریباً یکسان می‌باشد ولی مدل پژوهش در معیارهای متوسط بازده‌های منفی، بیشترین ضرر هفتگی، بازده تجمعی، انحراف معیار بازده، ارزش در معرض ریسک، ارزش در معرض ریسک شرطی (۰،۹۵)، نسبت شارپ، حداکثر افت سرمایه و نسبت کالمار دارای عملکرد بهتری نسبت به دو مدل هموزن و برابری ریسک بر پایه انحراف معیار می‌باشد. با توجه به اهمیت نسبت شارپ و کالمار برای سرمایه‌گذاران ریسک گریز، استفاده از این مدل برای آنها توصیه می‌شود.

## منابع


۱. دولو، م.؛ فدائی مولودی، ح. ا.؛ صفری طاهرخانی، ع. (۱۳۹۸). بررسی استراتژی تخصیص سهام بر اساس رویکرد ریسک برابر. راهبرد مدیریت مالی. ۱-۳۰.

۲. میرمحمدی، س. ا.؛ معدنچی زاج، م.؛ پناهیان، ح.؛ جباری، ح. (۱۴۰۰). انتخاب سبد سهام با رویکرد ترکیبی برابری ریسک و تحلیل عاملی بر پایه تغییر رژیم مارکوف .تصمیم گیری و پژوهش در عملیات. ۷(۱)، ۱۲۱-۱۴۹.

3. Acerbi, C. (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*, *26*(7), 1505-1518.

4. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3), 203-228.

5. Bai, X., Scheinberg, K., & Tutuncu, R. (2015). Least-squares approach to risk parity in portfolio selection. *Quantitative finance*, 16(3), 357-376.

6. Bucher, C., & Osterrieder, J. (2021). Risk Parity for Multi-Asset Futures Allocation – A Practical Analysis of the Equal Risk Contribution Portfolio (June 2, 2021). Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3858730.

7. Capiński, M., & Zastawniak, T. (2003). Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering, *Springer*.

8. Caporin, M., Lisi, F., & Janin, M. (2012). A survey on four families of perfomance measures. *Working papers series*, 12, 1-26.

9. Chaves, D. B., Hsu, J. C., LI, F., & Shakernia, O. (2011). Risk parity portfolio vs. other asset allocation heuristic portfolios. *Journal of investing*, 20, 108-118.

10. Choi, J., Kim, H., & Kim, S. (2021). Diversified Reward-Risk Parity in Portfolio Construction(September15,2021). Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=3871944.

11. Costa, G., & Kwon, R. H. (2019). Risk parity portfolio optimization under a Markov regime-switching framework. *Quantitative finance*, 19(3), 453-471.

12. Costa, G., & Kwon, R. (2020). Data-Driven Distributionally Robust Risk Parity Portfolio Optimization. *SSRN Electronic Journal*. 10.2139/ssrn.3709680.

13. D. K. Bagal, A. Rath, A. Barua, and D. Patnaik, "Estimating the parameters of susceptible-infected-recovered model of COVID-19 cases in India during lockdown periods," *Chaos Solitons Fractals,vol.140,p.110154,2020,doi:https:// doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110154.*

14. Davallou, M., Fadaei Molodi, H., & Safari Taherkhani, A. (2019). Stock allocation strategy with equal risk contribution. *Financial Management Strategy Journal*, 1-30.

15. DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *The review of financial studies*, 22(5), 1915-1953.

16. Gambeta, V., & Kwon, R. (2020). Risk return trade-off in relaxed risk parity portfolio optimization. *Journal of risk and financial management*, 13(10), 1-28.

17. Kim, H., & Kim, S. (2021). Reduction of estimation error impact in the risk parity strategies. *Quantitative Finance*, *21*(8), 1351-1364.

18. Lee, W. (2011). Risk-based asset allocation: a new answer to an old question? *The journal of portfolio management*, 37(4), 11-28.

19. Marat, M. (2020). A modified hierarchical risk parity framework for portfolio management. *The journal of financial data science*. DOI: https://doi.org/10.3905/jfds.2020.1.038

20. Mirmohammadi, E., Madanchi, M., Panahian, H., & Jabbary, H. (2021). Portfolio Selection using risk parity and factor analysis under markov regime-switching prope. *Journal of Decisions& Operations Research*, 7(1), 121-149.

21. Mirmohammadi, E., Madanchi, M., Panahian, H., & Jabbary, H. (2021). Stock Portfolio Optimization Using a Combined Approach of Relative Robust Risk Parity. *Iranian Journal of Finance*, 5(4), 87-106.

22. Nakagawa, K., Kawahara, T., & Ito, A. (2020) Asset Allocation Strategy with Non-Hierarchical Clustering Risk Parity Portfolio. *Journal of Mathematical Finance*, 10, 513-524.

23. Pflug, G. C. (2000). Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In Probabilistic constrained optimization (pp. 272-281). Springer, Boston, MA.

24. Rockafellar, R., & Uryasev, S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21-42.

25. Roncalli, T., & Weisang, G. (2016). Risk parity portfolios with risk factors. *Quant. Finance*. 16(3), 377–388.

26. Roncalli, T. (2013). Introduction to risk parity and budgeting. 1st edition, Chapman & Hall/CRC, USA.